

Concours d'entrée en première année du premier cycle
Epreuve majeure : Mathématiques Coef 4 Durée : 3h. Session 2009

Exercice 1

On définit la fonction numérique f de la variable réelle x par

$$f(x) = \ln(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1).$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que pour tout réel x ,

$$f(x) = 2x - \ln(\sqrt{1 + e^{2x}} + 1) \quad \text{et} \quad f(x) = x + (\sqrt{1 + e^{-2x}} - e^{-x}).$$

2. Montrer que (C) admet deux asymptotes obliques (d) et (d') sécantes en $A(\ln 2, \ln 2)$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Construire la courbe (C) ainsi que ses deux asymptotes.
5. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .

Exercice 2

Partie A

On désigne par $[A, B]$ un segment de milieu O du plan (P) et on se propose de déterminer l'ensemble E de toutes les isométries planes laissant le segment $[A, B]$ globalement invariant.

1. Citer tous les types d'isométries planes.
2. Etant donné un élément f de E , déterminer en justifiant $f(O)$.
3. A partir des valeurs possibles de l'image du point A par un élément f de E ,
 - (a) montrer que E contient exactement deux déplacements à préciser ;
 - (b) montrer que E admet exactement deux antidéplacements à préciser.
4. Conclure.

Partie B

Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1, 1, 1)$, $B(3, 1, 1)$ et $C(1, 1, 1 + 2\sqrt{3})$. Déterminer :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\widehat{AOB}$;
2. le point D tel que $ABCD$ soit un tétraèdre régulier et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ direct ;
3. Chacun des ensembles des points E_1 et E_2 définis par $E_1 : AM = 2BM$ et $E_2 : \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{CM}$.

Exercice 3

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le sens de variation de (u_n) .
2. Montrer que (u_n) est majorée par 1. Qu'en conclure ?

3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$.
5. Montrer rigoureusement que (u_n) converge vers une limite l à préciser.

Exercice 4

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^4 - 12iz - 100 = 0.$$

2. Etant donné un réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on considère l'équation

$$(E) : z^2 - 2z \tan \alpha + 2 \tan^2 \alpha + 1.$$

- (a) Résoudre l'équation (E) .
- (b) Etant donné le point M_α dont l'affixe est la solution de (E) d'ordonnée positive, montrer que M_α est un point de la conique $(\Gamma) : -x^2 + y^2 = 1$.
- (c) Déterminer la nature, un foyer et l'excentricité de (Γ) .
- (d) Construire l'ensemble des points M_α lorsque α parcourt $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 5

1. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e (\ln x)^2 dx, \quad J = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx, \quad K = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

2. On pose $A_n = \frac{2n+76}{n+1}$ où n est un entier relatif distinct de -1 .

- (a) Vérifier que $A_n = 2 + \frac{74}{n+1}$; puis citer tous les diviseurs de 74.
- (b) En déduire les valeurs de l'entier n pour lesquelles A_n est aussi un entier.